

GEOGEBRA: UN PUENTE PARA DESCUBRIR LA GEOMETRÍA EN EL ARTE GEOGEBRA: A BRIDGE TO DISCOVER THE GEOMETRY IN ART

Yasser Martín Guillén. yassermg@ucpejv.edu.cu. Universidad de Ciencias Pedagógicas Enrique José Varona, Cuba, Doctor en Ciencias.

María Cristina González Dosil. mariacgd@ucpejv.edu.cu. Universidad de Ciencias Pedagógicas Enrique José Varona, Cuba, Doctor en Ciencias.

Enrique José Gener Navarro. enriquejgn@ucpejv.edu.cu. Universidad de Ciencias Pedagógicas Enrique José Varona, Director de Recursos Humanos, Cuba, Doctor en Ciencias.

Resumen

El desarrollo de la tecnología en la contemporaneidad permea todos los ámbitos de la actividad humana. La educación matemática no se concibe, en la actualidad, sin el uso de la informática. El surgimiento de los asistentes matemáticos como GeoGebra ha transformado el quehacer de los profesores y dinamizado el proceso de enseñanza-aprendizaje de ramas como la Geometría.

Sin embargo, una aproximación a la práctica educativa de los investigadores evidenció insuficiencias en la utilización del asistente matemático GeoGebra en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura Arte y Geometría por lo que se trazó como objetivo proponer un conjunto de *applets*¹ para contribuir al PEA de la asignatura Arte y Geometría desde un enfoque dinámico.

La investigación, desde la dialéctica materialista como método general, desplegó a partir de un conjunto de métodos empíricos, teóricos y estadísticos que permitieron el diseño de un conjunto de *applets* caracterizado por potenciar el aprendizaje desarrollador, el enfoque dinámico de la Geometría, ser integradora y flexible.

Palabras claves

GeoGebra, Arte y Geometría

Abstract

The development of the technology in contemporaneity permeates all the spaces of the human activity. The mathematical education does not conceive himself, at the present time, without the use of information technology. The surging of the mathematical assistants as GeoGebra has transformed the task of the professors and once the process of teaching was expedited learning of branches like Geometry. However, an approximation to the investigators' educational practice evidenced insufficiencies in the utilization of the mathematical assistant GeoGebra in the process of teaching learning of the subject of study Art and Geometry for what was drawn like objective to propose a set of *applets* to contribute to the BREAKS WIND of the subject of study Art and Geometry from a dynamic focus.

The research, from the materialistic dialectics like general method, displayed from a set of empiric, theoretic and statistical methods that allowed to the design of a set of *applets* characterized to potentiate learning developer, the dynamic focus of Geometry, being integrative and flexible.

Key Words

GeoGebra, Art and Geometry

¹ applet: componente de una aplicación que se ejecuta en el contexto de otro programa

Introducción

La Conceptualización del Modelo Económico y Social Socialista cubano de desarrollo (2016) enfatiza en la necesidad de estar “preparado para enfrentar críticamente todo lo nocivo de la industria cultural hegemónica”, así como del desarrollo de la capacidad para apreciar el arte y su sentido estético.

Esta preocupación está dada por las características del mundo actual: su interconexión por los mercados internacionales y la industria cultural, esencialmente norteamericana, que invade las tradiciones, costumbres, mitologías y patrones de comportamiento que forman la identidad cultural de los pueblos.

La función social del arte como transmisor de la cultura se difunde mediante novedosas tecnologías de la información y las comunicaciones (TIC), por lo cual, las naciones que quieren proteger su identidad cultural tienen que definir una política que incluya estas tecnologías y potenciarlas desde los medios de difusión masiva y los sistemas educativos.

La cultura estético-artística constituye una de las dimensiones de la cultura general integral que debe poseer todo graduado universitario, en especial de los encargados de formar a las nuevas generaciones. Por ello, la Universidad de Ciencias Pedagógicas Enrique José Varona (UCPEJV) propicia el diseño de acciones en todas sus carreras que potencien en los futuros profesores su formación estético-cultural.

Esta preocupación generó una investigación doctoral del autor principal de esta ponencia en la carrera de Educación Matemática que tuvo como resultado una estrategia didáctica para la formación de la cultura estético-artística desde la disciplina Geometría. Como parte de la estrategia propuesta surge la asignatura Arte y Geometría para la carrera de Educación Matemática. El desarrollo de esta asignatura estuvo caracterizado por la intencionalidad de utilizar la tecnología como herramienta para favorecer este proceso. Sin embargo, en su obra se ofrecen pocos ejemplos de cómo usar los softwares matemáticos, en especial el GeoGebra.

Al acercarse a la práctica educativa de la asignatura Arte y Geometría mediante la observación continua del proceso de enseñanza-aprendizaje (PEA) como profesores de la disciplina, se evidenciaron potencialidades para utilizar el software GeoGebra relacionadas con:

- La motivación de los estudiantes por la asignatura Arte y Geometría.
- El dominio de las principales herramientas y comandos del asistente matemático GeoGebra.
- La concepción del programa de la asignatura que propone un enfoque dinámico del PEA mediante la utilización del asistente matemático GeoGebra.

Sin embargo, también se evidenciaron insuficiencias relacionadas con:

- Una comprensión limitada de los estudiantes de las relaciones geométricas presentes en las obras de arte cuando no están de manera evidente.
- Una utilización limitada de GeoGebra en el curso. Actualmente se utiliza solo en tres clases del curso y no se aprovechan todas sus potencialidades para contribuir a la comprensión de las relaciones entre el arte y la Geometría. Además, el asistente solo se utiliza como medio de explicación del profesor, los estudiantes no lo manipulan.

Estas potencialidades e insuficiencias han generado que se profundice en la utilización del asistente matemático GeoGebra por parte de los autores de este trabajo.

Por ello, se trazó el **objetivo** de proponer un conjunto de applets para contribuir al PEA de la asignatura Arte y Geometría desde un enfoque dinámico.

El trabajo que se presenta forma parte de los proyectos de investigación de la Cátedra “Dulce María Escalona” y el GeoGebra en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática.

Desarrollo

El enfoque dinámico en el PEA de la Geometría

El proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría en la actualidad discurre en dos posiciones contrarias según su enseñanza: la enseñanza tradicional y la enseñanza dinámica, de reciente desarrollo. Rodríguez, León y Lima (2010) al exponer sus posiciones sobre esta última argumentan que “El desarrollo vertiginoso de las TIC, en especial en el sector educacional, ha favorecido que hacia los finales del siglo XX y en el presente se produzca un encuentro entre la utilización de las tecnologías en la educación y la naciente revitalización de enfoques de enseñanza en la geometría dirigidos al desarrollo del pensamiento y la imaginación espacial” (p. 11).

Villiers (1996) destaca que la característica más preciada de la geometría dinámica es su potencial para estimular la experimentación, además de constituir un medio poderoso para verificar conjeturas verdaderas, y también es en extremo útil para construir contraejemplos. El enfoque dinámico permite al estudiante ser el mayor protagonista de su proceso de aprendizaje pues favorece el trabajo con los métodos heurísticos y la adquisición por la vía inductiva de los conceptos y relaciones. Además, permite el trabajo con la enseñanza basada en problemas.

Este enfoque está definido por León (2007) como “la postura o manera de concebir la enseñanza de este contenido desde el supuesto que las figuras pueden adquirir la cualidad del dinamismo a partir del movimiento de sus puntos o lados, manteniendo algunos de ellos fijos, lo cual origina transformaciones en las mismas” (p. 29).

En la carrera de Educación Matemática, de la Universidad de Ciencias Pedagógicas Enrique José Varona, el trabajo con GeoGebra se realiza desde el 1er año con la asignatura de currículo propio Elementos Informáticos y Asistentes Matemáticos. Luego, las diferentes disciplinas utilizan el asistente en su PEA, especialmente Didáctica de la Matemática, lo cual constituye una fortaleza de la carrera.

Para el desarrollo del enfoque dinámico en el PEA de la asignatura Arte y Geometría los medios de enseñanza y aprendizaje juegan un rol fundamental, pues ellos “aprovechan las potencialidades perceptivas de los canales sensoriales, facilitan la participación individual, desarrollan la creatividad, permiten la retención por más tiempo de los conocimientos adquiridos en clase, crean intereses cognoscitivos, impregnan más emotividad al proceso de aprendizaje, ofrecen seguridad y contribuyen a la autorreafirmación del estudiante” (Rodríguez et al, 2010, 16).

El desarrollo de las TIC, en este sentido, permite al profesor que el conocimiento llegue por diversos canales simultáneamente: visual y sonoro en un paquete que tiene en cuenta el color, el movimiento, la persistencia del estímulo, los añadidos

sonoros y la estética en general. Por ello, en la geometría dinámica, las TIC son fundamentales: “la geometría dinámica surge con la tecnología en un ambiente computacional a partir de la construcción de softwares diseñados para aprender geometría” (León, 2007, 26). Esto, si bien abrió una rama novedosa para la didáctica de la Geometría, también centró el desarrollo de las TIC en este enfoque hacia los asistentes matemáticos.

El GeoGebra es uno de los asistentes matemáticos más utilizados en las escuelas y universidades del mundo para el logro de lo antes expuesto. El trabajo con este asistente permite al estudiante realizar desde su computadora, tableta o teléfono inteligente construcciones desde cero, ya sean dirigidas o abiertas, de resolución o de investigación. El profesor, por su parte, puede realizar materiales educativos estáticos (imágenes, protocolos de construcción) o dinámicos (demostraciones dinámicas locales, applets en páginas web) de manera que sus estudiantes pueden visualizar conceptos abstractos, representar conexiones conceptuales y experimentar con la geometría. Este software es libre con versiones portables para diferentes dispositivos.

Martín (2019) reconoce la utilidad del GeoGebra en el PEA de la Geometría para su utilización en la asignatura Arte y Geometría:

- La valoración de la relación de la geometría con el arte y su función estética en diferentes contextos históricos, a partir de visualizar en el aula las propiedades geométricas de diferentes tipos de manifestaciones y productos artísticos nacionales y universales junto a los principales geómetras y artistas que contribuyeron al desarrollo de esta relación.
- La expresión de sus puntos de vista sobre las manifestaciones culturales, así como la muestra de una actitud de escucha, respeto y receptividad hacia las opiniones de otras personas y manifestaciones culturales o artísticas alejadas de los gustos propios en el aula y con otras personas fuera de ella.

Por ello, la creación de applets en GeoGebra tiene gran importancia en la comprensión del contenido y, por tanto, en la consecución de los objetivos del programa de la asignatura.

El desarrollo del PEA de la asignatura Arte y Geometría mediante GeoGebra

Para el desarrollo del curso Arte y Geometría es muy importante la utilización de medios de enseñanza y aprendizaje, creados y/o desarrollados con la intervención de las TIC. No es posible mostrar las grandes obras artísticas nacionales e internacionales sin la utilización del video o la computadora. Además, la utilización de los asistentes matemáticos como el GeoGebra permite la comprobación del contenido mostrado en clases y la experimentación.

El uso de las TIC en el programa de Arte y Geometría, en este sentido, fue impulsado por Martín (2019) quien, como parte de una estrategia didáctica, propuso:

- Creación de medios de enseñanza y aprendizaje con un diseño que aporta la integración de lo estético-artístico con la geometría para su utilización en las clases del curso “Arte y Geometría”.
- Elaboración de un libro digital que sistematice las relaciones entre la cultura estético-artística y la geometría para su utilización como bibliografía complementaria del curso “Arte y Geometría”.

El GeoGebra estuvo presente en la primera acción descrita. En esta investigación se propone la utilización de GeoGebra de la manera que muestra la tabla siguiente:

clase	Utilización de GeoGebra
5-6	Se utiliza un applets para mostrar las curvas de Brezier en sus distintos grados.
7-8	Se utilizan dos applets para mostrar la creación de la espiral áurea y como actividad de construcción del rectángulo áureo.
15-16	Se utiliza un applets como actividad para verificar el canon utilizado en una obra de arte
17-18	Como medio de enseñanza para mostrar el teselado irregular y la transformación de un pentágono en lagarto según Escher

Como se puede apreciar, la utilización de GeoGebra se reduce a 6 applets en 8 horas clases de las 36 h/c presenciales de los estudiantes, lo que supone un esfuerzo considerado, pero discreto. Los autores de este trabajo consideran, en este sentido, la posibilidad de crear un conjunto mayor de applets para contribuir al PEA de la asignatura de referencia. La siguiente tabla muestra la propuesta de inserción de applets:

Clase	Utilización de GeoGebra
3-4	Se propone la utilización de tres applets, el primero para mostrar los elementos básicos de una construcción primitiva mediante pilares y alquitra. Luego, en el desarrollo de la conferencia se utilizan dos applets para mostrar las ecuaciones de la catenaria (coseno hiperbólico) y la parábola que constituyen las curvas más óptimas para la construcción de estructuras de recubrimiento superior de un espacio o que soporta otra estructura respectivamente.
5-6	Se propone la utilización de dos applets, uno es anterior a la propuesta que se presenta y muestra la obtención de las curvas de Brezier según sus distintos grados, el nuevo traslada esta curva a un edificio (el Walt Disney Concert Hall) de manera que los estudiantes reconozcan en una estructura la utilización de las curvas.
7-8	Se propone la utilización de cuatro applets, dos anteriores a la propuesta y dedicados a mostrar la espiral áurea y la construcción de un rectángulo áureo. Los dos nuevos son: una herramienta para la construcción de un rectángulo áureo dado dos puntos lo que permite a los estudiantes comprobar, mediante la inserción de imágenes, si las obras se ajustan o no al rectángulo áureo, y el otro es la construcción de un pentágono regular estrellado para que los estudiantes hallen las razones que existen entre los diferentes segmentos que lo componen y verifiquen que están en la razón áurea.
13-14	Se proponen dos applets: uno para identificar las diferencias entre la perspectiva caballera y la perspectiva cónica, y el otro es un procedimiento para comprobar la utilización de la perspectiva cónica en obras pictóricas mediante la inserción de imágenes y la identificación de los puntos de fuga y la línea del horizonte.

15-16	Se mantiene un procedimiento para determinar el canon utilizado en una obra de arte y luego se propone un nuevo applets que consiste en una herramienta que simplifica este proceso y que es utilizada para comprobar el canon de Praxíteles, Policeto o Durero.
17-18	Se proponen tres applets, uno anterior que muestra la transformación de un hexágono en lagarto según la transformación realizada por el artista M.C. Escher, otro resulta una transformación de un applet anterior que mostraba el procedimiento para teselar un cuadrilátero a una generalización mediante una herramienta, finalmente se propone un applet para mostrar los tipos de teselados (regular, semirregular e irregular).
33-34	Se proponen dos applets: uno para la construcción de la biblioteca que se describe en el libro “El nombre de la rosa” y el otro para la comprensión del conflicto de la novela Planilandia: un romance entre dos dimensiones.
37-38	Se propone un applet para mostrar la transformada de Fourier que representa de manera matemática el movimiento oscilatorio de una cuerda.
41-42	Se propone un applet para mostrar el triángulo de Sierpinski.

Un ejemplo de estos applets se muestra a continuación:

Título: **Curvas de Bezier** (rediseño)

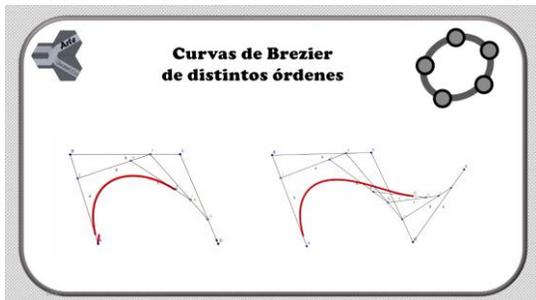
Objetivo: Construir curvas de Bezier

Clase para la que se propone: Taller 1

Descripción: Es un medio de enseñanza que muestra cómo se construyen las curvas de Bezier y propone a los estudiantes la construcción de una curva de este tipo como estudio independiente.

Figura 1

Curvas de Bezier de distintos órdenes.



Nota. La imagen muestra la inserción del applet en una presentación digital de la asignatura.

Título: **Pentágono estrellado o pentagrama**

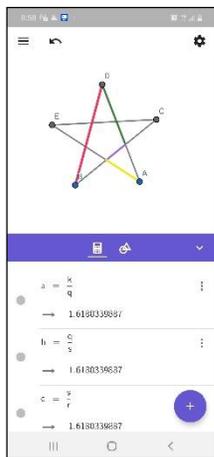
Objetivo: Identificar la proporción áurea entre los elementos del pentagrama

Clase para la que se propone: Taller 2

Descripción: Es una actividad donde se construye el pentagrama y se comprueba la proporción áurea entre los distintos segmentos de la construcción. Esta actividad se puede realizar desde los teléfonos móviles de los estudiantes.

Figura 2

Cálculo de las razones del pentágono que permiten evidenciar la presencia del número áureo en GeoGebra para móviles



Título: **Teselado irregular**

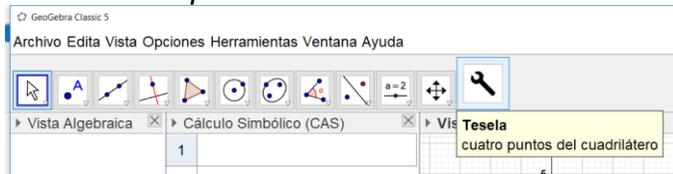
Objetivo: Mostrar el teselado irregular a partir del teorema de de Varignon

Clase para la que se propone: Taller 4

Descripción: Muestra mediante una herramienta como todo cuadrilátero tesela.

Figura 3

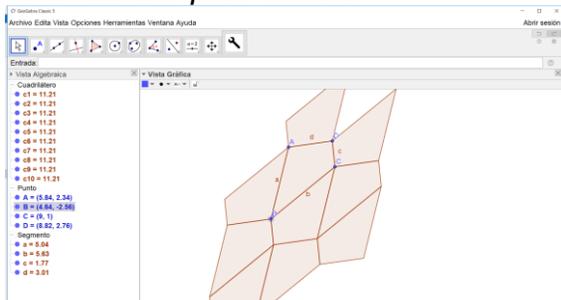
Herramienta para teselar



Nota. La imagen muestra la herramienta creada y su ayuda.

Figura 4

Herramienta para teselar



Nota. La imagen muestra la herramienta aplicada a un trapecoide.

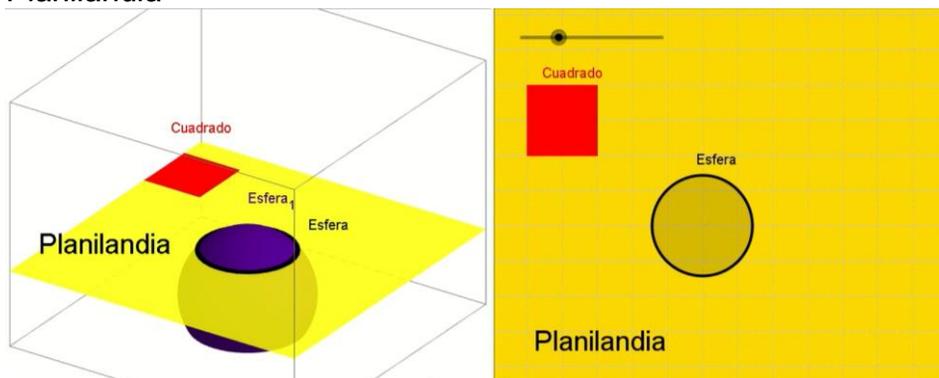
Título: **Planilandia**

Objetivo: Reflexionar sobre la comprensión de las dimensiones.

Clase para la que se propone: Conferencia 4 (clases 33-34)

Descripción: Medio de enseñanza que muestra la interacción de la esfera con el cuadrado en 2D y en 3D como lo realiza la novela Planilandia, romance entre varias dimensiones. El Applet tiene dividida las dos vistas y mediante una animación permite ver como la esfera atraviesa el plano donde se encuentra el cuadrado (Planilandia) y la descripción realizada en la novela.

Figura 5
Planilandia



Nota. La imagen muestra la intersección de la esfera con Planilandia.

Conclusiones

El tratamiento de la información realizado por los autores permitió la sistematización teórico-metodológica del proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura Arte y Geometría necesaria para la creación de applets en GeoGebra en correspondencia con el enfoque dinámico.

Los resultados de las indagaciones empíricas obtenidos, permitieron la caracterización del estado actual del PEA de la asignatura Arte y Geometría, en especial la utilización del asistente matemático GeoGebra de manera que se evidenciaron sus potencialidades para suplir las dificultades detectadas.

Para lograr lo propuesto, se elabora una colección de applets, que potencian el enfoque dinámico en la asignatura Arte y Geometría, y se caracteriza por ser integradora y estética, lo que revela la pertinencia social y pedagógica del tema investigado.

El conjunto de applets diseñado para el trabajo en la asignatura Arte y Geometría ha permitido una mayor comprensión del contenido y elevar la motivación hacia el aprendizaje, la experimentación y la investigación de la asignatura.

Bibliografía

Álvarez Pérez M, compiladora. Interdisciplinariedad: una aproximación desde la enseñanza-aprendizaje de las ciencias. La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación; 2004.

Ballester Pedroso S, Santana de Armas H, Hernández Montes de Oca S, Cruz I, Arango González C, García García M. Metodología de la Enseñanza de la Matemática (tomo II). La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación; 2000.

- Ballester Pedroso S, Villegas Jiménez E, Quintana Valdés A, Rodríguez Aruca M. Recopilación, procesamiento y análisis de la información. En: Cuaderno de tareas, ejercicios y problemas de Matemática Séptimo grado. La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación; 2002, Segunda reimpresión; 2005. 1-21.
- Barrabia Monier O. La formación como categoría de la Pedagogía de la Educación Superior Pedagógica. Algunos apuntes y reflexiones. Varona digital. 2016 ene-jun; (62).
- Boza Y. La preparación interdisciplinaria de los profesores: un ejemplo en el área de ciencias exactas de la Educación Media Superior (tesis de doctorado). La Habana, Cuba: UCPEJV, 2010.
- Cabrera Elejalde OR. Cultura económica y educación en valores. La Habana, Cuba: Editorial Acuario, 2018.
- Colectivo de autores. Estética. Enfoques Actuales. La Habana, Cuba: Editorial Félix Varela, 2005.
- De Guzmán M. El papel del matemático en la educación matemática. Madrid, España: Actas del Congreso, Sociedad Andaluza de Educación Matemática "THALES", 1998
- Fiallo Rodríguez J. La interdisciplinarietà: un concepto "muy conocido". En: Interdisciplinarietà: Una aproximación desde la enseñanza-aprendizaje de las ciencias. La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación; 2004. 20-33.
- Franco Ruschmann CB. Arte geométrico: análisis y tendencias de su desarrollo plástico. (Tesis doctoral). Granada, España: Universidad de Granada, 2003.
- Frómata Rodríguez CM. Propuesta de estrategia pedagógica del proceso de promoción sociocultural en la formación inicial del Licenciado en Educación: Especialidad pedagogía-psicología en el Instituto Superior Pedagógico "Enrique José Varona". (Tesis doctoral en Ciencias Pedagógicas). La Habana, Cuba: ISPEJV, 2007
- González Dosil MC. Propuesta didáctica para la aplicación de la enseñanza basada en problemas a la formación semipresencial en la disciplina de Geometría. (Tesis doctoral en Ciencias Pedagógicas). La Habana, Cuba: ISPEJV, 2006.
- Jiménez Milián MH. Enfoque desarrollador en la enseñanza-aprendizaje de la Matemática. La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación; 2013.
- Leandro Barquero CM. La geometría a través del arte. Murcia, España: CEIP Infante Don Juan Manuel, 2009.
- León Roldán T. Concepción didáctica para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría con enfoque dinámico en la Educación Primaria. (Tesis doctoral en Ciencias Pedagógicas). La Habana, Cuba: ISPEJV; 2007
- Martin Guillén Y. Arte y Geometría: una asignatura optativa que contribuye a la formación de la cultura artística en la formación inicial del profesor de Matemática. [monografía en CD ROM]. La Habana, Cuba: XI Encuentro Taller científico metodológico de la cátedra Dulce María Escalona; 2017.
- Martin Guillén Y. La cultura artística en la formación inicial del profesor de Matemática. Pedagogía Profesional; 2016. 14 (3).
- Martin Guillén Y. La formación de la cultura estético-artística en los estudiantes de la carrera de educación matemática desde el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría. [tesis de doctorado]. UCPEJV; 2019.

- Martin Guillén Y. Leonardo da Vinci: un exponente imprescindible para contribuir a la formación de la cultura estético-artística en la formación inicial del profesor de Matemática. [Ponencia]. XIX Evento Internacional “La enseñanza de la Matemática, la Estadística y la Computación”. Matecompu; 2017.
- Martin Guillén Y, Cabrera Elejalde O.R. La formación de la cultura Estético – Artística en la carrera de Educación Matemática desde la Geometría. [Ponencia para el evento Convención VARONA 2019].
- Martin Guillén Y, Gener Navarro E.J. Enseñar Geometría desde el Arte. Propuesta de curso para la Carrera Educación Matemática. [Ponencia para el evento Convención VARONA 2019]
- Mendoza Portales L. Axiología y cultura en José Martí. (Tesis doctoral en Ciencias Filosóficas). La Habana, Cuba: Instituto de Filosofía, 2003.
- Mendoza Portales L. Cultura y valores en José Martí. La Habana, Cuba: Pueblo y Educación, 2008.
- Mendoza Portales L. Formación cultural y de valores de la identidad ¿Un reto en la formación universitaria del profesional de la educación? [Ponencia para el evento Pedagogía 2011].
- Ministerio de Educación Superior (MES). Resolución No. 210/07 Reglamento del Trabajo Docente y Metodológico. La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación; 2007.
- Ministerio de Educación Superior (MES). Resolución No.2-2018 Reglamento de Trabajo Docente y Metodológico, 2018.
- Morales Mejía ML. Aplicación de la geometría en el arte, una nueva manera de asociar conceptos y medidas. (Tesis de maestría en enseñanza de las ciencias). Manizales, Colombia: Universidad Nacional de Colombia, 2016.
- Partido Comunista de Cuba (PCC). Conceptualización del Modelo Económico y Social Cubano de desarrollo socialista. (tabloide). La Habana, Cuba: PCC, 2016.
- Peralta J. Las matemáticas en el arte, la música y la literatura. Madrid, España: Universidad Autónoma de Madrid, 1997.
- Rodríguez Aruca M, León Roldán T, Lima Montenegro S. Geometría dinámica. Una propuesta didáctica. La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación, 2010.
- Sánchez M. La estetización difusa o la difusa estetización del mundo actual. En: Estética. Enfoques Actuales. La Habana, Cuba: Felix Varela, 2005.
- Sánchez Ortega PM. Frómeta Rodríguez CM, Seija Bagué C, Cabrera Elejalde OR, Educación estética y educación artística en el sistema educacional cubano. Experiencias y consecuencias. La Habana, Cuba: Sello editor Educación Cubana, 2017.